**Программа учебной дисциплины Линейная алгебра и геометрия**

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № от «\_\_»\_\_\_\_\_20\_\_ г.

|  |  |
| --- | --- |
| Автор | Д.И.Пионтковский |
| Число кредитов | 10 |
| Контактная работа (час.) | 144 |
| Самостоятельная работа (час.) | 198 |
| Курс | 1 |
| Формат изучения дисциплины | Без использования онлайн курса |

1. **ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ**

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра и геометрия» являются

* + 1. ознакомление студентов с основами линейной алгебры, аналитической геометрии и общей алгебры;
    2. формирование у студентов навыков использования методов линейной алгебры для формализации и решения прикладных задач, в том числе экономических и геометрических, и, особенно, возникающих в задачах анализа данных и в компьютерных науках.

В результате освоения дисциплины студент должен:

* Знать основные теоремы линейной алгебры и иметь четкое представление об основных алгебраических структурах, используемых в задачах линейной алгебры;
* Уметь решать задачи линейной алгебры и аналитической геометрии, перечисленные в программе курса, иметь представление об алгоритмической сложности таких задач;
* Иметь навыки решения систем линейных уравнений, вычисления определителей, исследования квадратичных форм, нахождения собственных векторов, приведения оператора к жордановой форме, определения типов и свойств кривых и поверхностей первого и второго порядка.

Курс относится к числу базовых и не имеет пререквизитов, выходящих за пределы отличного владения школьной программой по геометрии, алгебре и началам анализа.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Математический анализ;
* Дифференциальные уравнения;
* Теория вероятностей и математическая статистика;
* Анализ данных;
* Машинное обучение,

и других.

# Содержание УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1. **Векторы и матрицы.**

Векторы как упорядоченные наборы чисел. Линейные операции. Скалярное произведение, неравенство Коши, неравенство треугольника, угол между векторами.

Линейные многообразия, прямые. Прямые и плоскости в трехмерном пространстве, способы задания, углы между ними.

Матрицы и линейные операции над ними. Различные алгоритмические реализации умножения матриц. Простейшие матричные уравнения, система линейных уравнений в матричной форме. Невырожденные (обратимые слева) матрицы.

\*Другие определения произведения матриц.

\*Простейшая линейная производственная модель.

1. **Определитель.**

Маломерные определители. . Расстояния, площади многоугольников и объемы тетраэдров и параллелепипедов в двумерном и трехмерном арифметическом пространстве.

Перестановки. Знак перестановки*,* разложение перестановки в произведение транспозиций.

Понятие группы. Примеры.

\*Примеры и некоторые свойства групп подстановок. Группы симметрий. Подгруппы, порядок элемента группы. Теорема Кэли.

Определитель квадратной матрицы.

Свойства определителя. Способы вычисления определителей. Определитель произведения матриц.

\*Аксиоматическое определения определителя.

\*Классические определители.

1. **Решение систем линейных уравнений.**

Решение системы линейных уравнений с невырожденной матрицей. Формулы Крамера.

Формула обратной матрицы.

Элементарные преобразования. Общая схема редукции*.* Метод Гаусса.

Ранг матрицы: различные определения. Миноры и вычисление ранга.

Другие способы вычисления обратной матрицы.

Теорема Кронекера-Капелли, альтернатива Фредгольма. Общий вид решений системы линейных уравнений.

1. **Линейные пространства.**

Определение и примеры линейных пространств. Подпространство. Линейная независимость, базис, размерность. Замена координат. Размерности суммы и пересечения подпространств.

Линейные отображения и линейные операторы. Изоморфизм линейных пространств. Замена базисов. Ядро и образ линейного отображения.

\* Свойства решетки подпространств линейного пространства.

\*Факторпространства. Точные последовательности. Тензорное произведение линейных пространств.

1. **Комплексные числа.**

Понятие поля. Примеры: некоторые числовые поля, поле из двух элементов.

Определение комплексного умножения на плоскости. Основные операции с комплексными числами. Модуль и аргумент, формулы Муавра, формула Эйлера. Решение простейших алгебраических уравнений. \*Основная теорема алгебры.

Линейные пространства над полем.

Комплексное линейное пространство, комплексификация действительного пространства.

\*Алгебры над полем. Кватернионы. Геометрический смысл кватернионов.

\*Бесконечномерные алгебры. Симметрическая алгебра и алгебра Грассманна. Определитель как старшая внешняя степень оператора.

1. **Евклидовы пространства.**

Билинейные и квадратичные формы. Ортогональные базисы, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Канонический вид и нормальный вид квадратичной формы, закон инерции. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Метод Якоби. Критерий Сильвестра.

Евклидовы пространства. Матрица Грама. Неравенство треугольника, неравенство Коши. Угол между векторами. Проекции, нормали, расстояния. Ортогональные и ортонормированные базисы, их построение. Объем параллелепипеда, его связь с ориентированным объемом и матрицей Грама.

1. **Собственные векторы**.

Инвариантные подпространства и собственные вектора линейного оператора. Собственные значения и характеристический многочлен. Теорема о минимальной размерности инвариантных подпространств. Диагонализуемый оператор.

\*Модель межотраслевого баланса.

Корневые подпространства. Жорданова форма и жорданов базис. Алгоритм построения жорданова базиса. Матричные многочлены, теорема Гамильтона-Кэли, минимальный многочлен и его связь с характеристическим многочленом.

\*Фробениусова форма матрицы.

Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением. Самосопряженные (симметрические) операторы и ортонормированные собственные базисы. Унитарные и ортогональные операторы.

1. **Основы аналитической геометрии**

Векторное и смешанное произведение векторов, их применение. \* Смешанное произведение и форма объема в многомерном пространстве.

Движения аффинного пространства, теорема о разложении движения в композицию ортогонального оператора и параллельного переноса. Общие квадрики в n-мерном арифметическом пространстве, теорема о приведении их движением к каноническому виду. Кривые второго порядка, их классификация. Свойства конических сечений. Классификация поверхностей второго порядка.

\* Основы проективной геометрии: проективные пространства, проективизация, понятие о проективном алгебраическом многообразии, изоморфизм групп GL(V) и H(V ) /PGL(V), задание проективного отображения его значениями на точках общего положения.

.

# ОЦЕНИВАНИЕ

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде двух распределенных домашних заданий (в течение, соответственно, 1-2 и 3-4 модулей), контрольных работ по итогам 2 и 3 моделей, а также коллоквиума в 4 модуле изучения курса. Итоговый контроль осуществляется в виде экзамена в форме (после 2 модуля) и в форме письменной контрольной работы (после 4 модуля). двух письменных экзаменов (после 4 и 6 модуля), а также двух коллоквиумов (в конце 2 и 4 модулей). Итоговые оценки Оитог по 10-балльной шкале формируются как округленные до целого числа баллов от 0 до 10 взвешенные суммы, вычисляемые следующим образом.

Оценка за промежуточный экзамен (2 модуль):

Оитог=0,2\*Ок.р.+0,1\*Од.з.+0,3\*Ол+0,4\*Окол. +0,1\*Осем,

где Ок.р., Од.з, Ол, Окол. и Осем обозначают оценки по 10-балльной шкале за контрольную работу, домашнее задание, устную сдачу задач по листкам, первый коллоквиум и активность на семинаре,. Итоговая оценка (4 модуль):

Оитог= 0,15\*Окр1+0,1\*Од.з.+0,25\*Ол+0,35\* Окол.+0,1\*Осем. + 0,15\*Окр2.,

где Окр3, Окр4, Од.з, Окол., Ол , Осем обозначают оценки по 10-балльной шкале за третью и четвертую контрольные работы, второе домашнее задание, устную сдачу задач по листкам во втором семестре и активность на семинаре во втором семестре, соответственно.

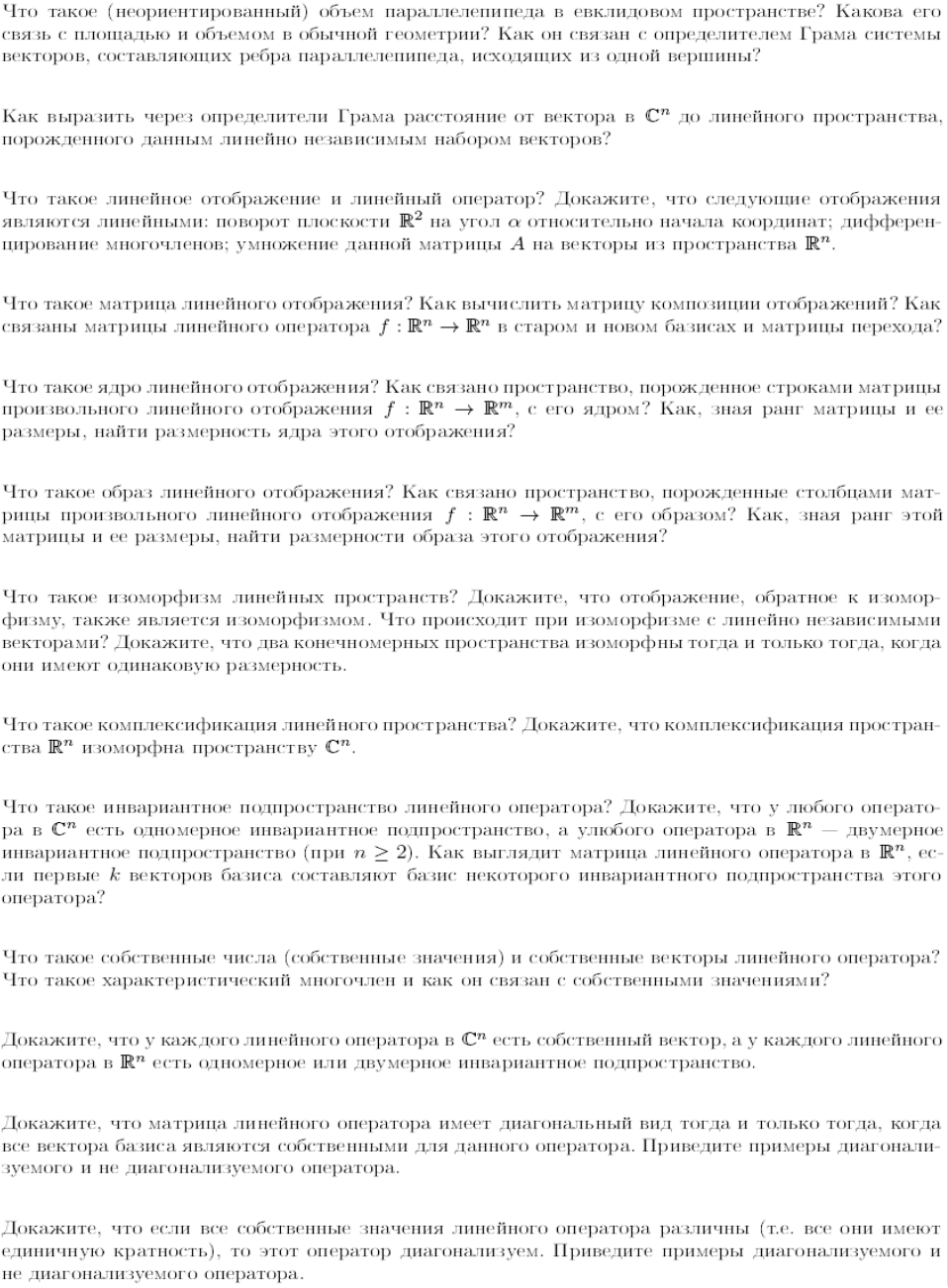
Способ округления оценок – арифметический во всех случаях, кроме следующих: оценка более 3 и менее 4 баллов всегда округляется до 3 баллов, а если при вычислении получается оценка выше 10 баллов, выставляется 10 баллов.

На пересдаче студенту не предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

В диплом выставляет итоговая оценка по учебной дисциплине.

# ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать около двух тысяч задач из “Сборника задач по линейной алгебре” И. В. Проскурякова, а также задачники [Ким Г. Д. , Крицков Л. В., *Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том I*, М., «Планета знаний», 2007; Сборник задач по алгебре. (Под редакцией А.И.Кострикина). М., «МЦНМО», 2009]. Примеры теоретических вопросов, которые предлагались на коллоквиуме, приведены ниже.



1. **РЕСУРСЫ**
   1. **Основная литература**

Курош А. Г. *Курс высшей алгебры.* М., Наука, 1971

Гельфанд И. М. *Лекции по линейной алгебре*. (Любое издание, кроме 1-го, напр., М., Наука, 1971)

Винберг Э. Б. *Курс алгебры.* М., Факториал, 1999 и последующие издания

Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. (Любое издание, напр., М., БИНОМ, 2005)

* 1. **Дополнительная литература**

Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D., *Linear Algebra for Economists.* Berlin—Heidelberg, Springer, 2011

Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г., *Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии*, М., ГУ ВШЭ, 1998 (или другое издание)

Сборник задач по алгебре. (Под редакцией А.И.Кострикина). М., «МЦНМО», 2009

* 1. **Программное обеспечение**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование** | **Условия доступа** |
| 1. | Microsoft Windows 7 Professional RUS  Microsoft Windows 10  Microsoft Windows 8.1 Professional RUS | *Из внутренней сети университета (договор)* |
| 2. | Microsoft Office Professional Plus 2010 | *Из внутренней сети университета (договор)* |

* 1. **Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование** | **Условия доступа** |
|  | ***Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы*** | |
| 1. | Консультант Плюс | *Из внутренней сети университета (договор)* |
| 2. | Электронно-библиотечная система Юрайт | URL: https://biblio-online.ru/ |
| 3. | Электронный доступ к литературе, выпущенной издетельством Springer | URL: https://www.springer.com  *Из внутренней сети университета (договор)* |
|  | ***Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)*** | |
| 1. | Открытое образование | URL: https://openedu.ru/ |

* 1. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для лабораторных и самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­­ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.