**Программа учебной дисциплины «Линейная алгебра и геометрия»**

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № от «\_\_»\_\_\_\_\_20\_\_ г.

|  |  |
| --- | --- |
| Автор | Р.С.Авдеев, кандидат физико-математических наук  ([suselr@yandex.ru](mailto:suselr@yandex.ru), [ravdeev@hse.ru](mailto:ravdeev@hse.ru)) |
| Число кредитов | 9 |
| Контактная работа (час.) | 144 |
| Самостоятельная работа (час.) | 198 |
| Курс | 1 |
| Формат изучения дисциплины | без использования онлайн курса |

1. **ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ**

Целями освоения дисциплины «Линейная алгебра и геометрия» являются овладение студентами основными понятиями и методами линейной алгебры.

В результате освоения дисциплины студент должен:

* Знать основные теоремы линейной алгебры и иметь чёткое представление об основных алгебраических структурах, используемых в задачах линейной алгебры;
* Уметь решать задачи линейной алгебры и аналитической геометрии, перечисленные в программе курса, иметь представление об алгоритмической сложности таких задач;
* Иметь навыки решения систем линейных уравнений, вычисления определителей, исследования квадратичных форм, нахождения собственных векторов, приведения линейного оператора к жордановой форме, определения типов и свойств кривых и поверхностей первого и второго порядка.

Для освоения данной учебной дисциплины не требуются знания и компетенции, выходящие за пределы требований к поступающим на программу бакалавриата.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Математический анализ;
* Дифференциальные уравнения;
* Теория вероятностей и математическая статистика;
* Анализ данных;
* Машинное обучение,

и других

1. **СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**
2. **Векторы и матрицы.**

Векторы как упорядоченные наборы чисел. Сложение векторов и умножение вектора на скаляр. Скалярное произведение векторов, неравенство Коши, неравенство треугольника, угол между векторами.

Системы линейных уравнений и линейные многообразия.

Матрицы. Операции над матрицами и их свойства. Система линейных уравнений в матричной форме.

1. **Определители.**

Маломерные определители.

Подстановки. Знак подстановки. Умножение подстановок. Знак произведения подстановок. Разложение подстановки в произведение транспозиций.

Определитель квадратной матрицы.

Свойства определителя. Способы вычисления определителей. Определитель произведения матриц.

1. **Системы линейных уравнений.**

Решение системы линейных уравнений с невырожденной матрицей. Формулы Крамера.

Обратная матрица, критерий её существования. Формула обратной матрицы. Другие способы вычисления обратной матрицы.

Критерий определённости системы линейных уравнений.

Элементарные преобразования. Общая схема редукции*.* Метод Гаусса.

Структура множества решений системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений.

Ранг матрицы: различные определения. Миноры и вычисление ранга.

Теорема Кронекера-Капелли.

1. **Векторные пространства.**

Определение и примеры векторных пространств. Подпространство. Линейная независимость, базис, размерность. Линейные комбинации и линейные оболочки. Замена координат и матрица перехода. Сумма и пересечение подпространств, их размерности.

Линейные отображения и линейные операторы. Изоморфизм векторных пространств. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса. Ядро и образ линейного отображения, их размерности.

1. **Комплексные числа.**

Понятие поля. Примеры: числовые поля, поле из двух элементов.

Определение комплексного умножения на плоскости. Основные операции с комплексными числами. Модуль и аргумент, формулы Муавра, формула Эйлера. Решение простейших алгебраических уравнений. Основная теорема алгебры.

Векторные пространства над полем.

Комплексное векторное пространство, комплексификация действительного векторного пространства.

1. **Евклидовы пространства.**

Билинейные и квадратичные формы. Ортогональные базисы, процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Канонический вид и нормальный вид квадратичной формы, закон инерции. Положительно и отрицательно определённые квадратичные формы. Метод Якоби. Критерий Сильвестра.

Евклидовы пространства. Матрица Грама. Неравенство треугольника, неравенство Коши. Угол между векторами. Проекции, нормали, расстояния. Ортогональные и ортонормированные базисы, их построение. Объём параллелепипеда, его связь с ориентированным объёмом и матрицей Грама.

1. **Собственные векторы**.

Инвариантные подпространства и собственные векторы линейного оператора. Собственные значения и характеристический многочлен. Теорема о минимальной размерности инвариантных подпространств. Диагонализуемый оператор.

Корневые подпространства. Жорданова нормальная форма и жорданов базис. Алгоритм построения жорданова базиса. Матричные многочлены, теорема Гамильтона-Кэли, минимальный многочлен и его связь с характеристическим многочленом.

Линейные операторы в пространстве со скалярным произведением. Самосопряжённые (симметрические) операторы и ортонормированные собственные базисы. Унитарные и ортогональные операторы.

1. **Основы аналитической геометрии**

Векторное и смешанное произведение векторов, их применение.

Движения аффинного пространства, теорема о разложении движения в композицию ортогонального оператора и параллельного переноса. Общие квадрики в n-мерном арифметическом пространстве, теорема о приведении их движением к каноническому виду. Кривые второго порядка, их классификация. Свойства конических сечений. Классификация поверхностей второго порядка.

1. **ОЦЕНИВАНИЕ**

Все оценки выставляются по 10-балльной шкале.

Текущий контроль знаний осуществляется в следующих формах:

* письменная контрольная работа (по одной в конце 1-го и 3-го модуля);
* выполнение индивидуальных домашних заданий (на протяжении всего курса);
* устная сдача задач из листков, выдаваемых с целью лучшего усвоения и закрепления теоретического материала (на протяжении всего курса);
* коллоквиум (в 4-м модуле).

Итоговый контроль осуществляется в форме устного экзамена во 2-м модуле и в форме письменной экзаменационной работы в 4-м модуле; результат отражается в оценке Оэкз.

Накопленная оценка за текущий контроль формируется из следующих компонент:

* оценка за контрольную работу Ок/р;
* оценка за индивидуальные домашние задания Од/з;
* оценка за сдачу листков Ол;
* оценка за коллоквиум Околл (только в 4-м модуле);
* оценка за работу на семинарах Осем.

**Формула для итоговой оценки во 2-м модуле:**

Оитог = 0,6\* Онакопл + 0,4\* Оэкз,

где Онакопл рассчитывается по следующей формуле:

Онакопл = 0,4\*Ок/р + 0,2\*Од/з + 0,2\*Ол +0,2\*Осем.

Округление производится только для итоговой оценки. Способ округления: оценка между 3 и 4 всегда округляется до 3; во всех остальных случаях округление арифметическое.

**Формула для итоговой оценки в 4-м модуле:**

Оитог = 0,75\* Онакопл + 0,25\* Оэкз,

где Онакопл рассчитывается по следующей формуле:

Онакопл = 0,2\*Ок/р + 0,15\*Од/з + 0,15\*Ол + 0,4\*Околл + 0,1\*Осем.

Округление производится только для итоговой оценки. Способ округления: оценка между 3 и 4 всегда округляется до 3; во всех остальных случаях округление арифметическое.

В диплом выставляет итоговая оценка по учебной дисциплине.

1. **ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

Оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации

Для текущего контроля знаний, а также промежуточной аттестации можно использовать около двух тысяч задач из задачника И.В. Проскурякова «Сборник задач по линейной алгебре». Примеры теоретических вопросов для устного экзамена и коллоквиума приведены ниже.

1. Что такое поле? Докажите, что в поле элемент, обратный к любому ненулевому элементу, определён однозначно.
2. Что такое комплексные числа? Дайте определение арифметических операций над комплексными числами.
3. Что такое модуль и аргумент комплексного числа? Как модуль и аргумент ведут себя при перемножении комплексных чисел?
4. Что такое кратность корня многочлена? Докажите, что сумма кратностей корней многочлена с комплексными коэффициентами равна его степени.
5. Что такое векторное пространство над произвольным полем?
6. Что такое сумма подпространств произвольного векторного пространства?
7. Что такое матрица перехода от одного базиса векторного пространства к другому?
8. Что такое линейное отображение и линейный опратор?
9. Что такое матрица линейного отображения? Как построить эту матрицу, зная образы базисных векторов при данном линейном отображении?
10. Что такое ядро, образ и ранг линейного отображения? Докажите, что ядро и образ являются векторными пространствами.
11. Что такое изоморфизм векторных пространств? Докажите, что отображение, обратное к изоморфизму, также является изоморфизмом.
12. Что такое инвариантное подпространство линейного оператора?
13. Что такое собственные векторы и собственные значения линейного оператора? Что такое характеристический многочлен и как он связан с собственными значениями?
14. Докажите, что у всякого линейного оператора в n-мерном комплексном векторном пространстве есть собственный вектор, а у всякого линейного оператора в n-мерном действительном векторном пространстве есть одномерное или двумерное инвариантное подпространство.
15. Докажите, что матрица линейного оператора имеет диагональный вид тогда и только тогда, когда все векторы базиса являются собственными для данного оператора.
16. Что такое корневой вектор и корневое подпространство линейного оператора в конечномерном комплексном векторном пространстве?
17. Что такое значение многочлена на линейном операторе? Сформулируйте и докажите теорему Гамильтона-Кэли.
18. Дайте определение линейного функционала (линейной формы) и двойственного (сопряжённого пространства).
19. Что такое билинейная форма? Что такое матрица билинейной формы?
20. Что такое квадратичная форма? Что такое матрица квадратичной формы?
21. Что такое индексы инерции квадратичной формы на конечномерном действительном векторном пространстве?
22. Сформулируйте и докажите критерий Сильвестра положительно (отрицательной) определённости квадратичной формы на конечномерном действительном векторном пространстве.
23. Дайте определения евклидова и эрмитова (унитарного) векторного пространства.
24. Что такое ортогональный базис и ортонормированный базис? Докажите, что во всяком конечномерном евклидовом или эрмитовом пространстве существует ортонормированный базис.
25. Что такое матрица Грама системы векторов в евклидовом или эрмитовом пространстве?
26. Что такое ортогональное дополнение подпространства в евклидовом или эрмитовом пространстве? Докажите, что оно является подпространством.
27. Что такое ортогональная проекция вектора на подпространство в евклидовом и эрмитовом пространстве?
28. Что такое (неориентированный) объём параллелепипеда в евклидовом или эрмитовом пространстве? Как он связан с матрицей Грама данной системы векторов?
29. Что такое ориентированный объём параллелепипеда? Какова связь объёма и ориентированного объёма параллелепипеда в евклидовом пространстве?
30. Что такое самосопряжённый оператор в евклидовом или эрмитовом пространстве? Какими свойствами характеризуется матрица самосопряжённого оператора в ортонормированном базисе?
31. Что такое ортогональный оператор в евклидовом пространстве и унитарный оператор в эрмитовом пространстве? Какими свойствами характеризуется матрица ортогональьного (и унитарного) оператора в ортонормированном базисе?
32. **РЕСУРСЫ**
    1. **Основная литература**
    2. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Факториал, 1999 (или любое последующее издание).
    3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994 (или любое последующее издание).
    4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2000 (или любое последующее издание).
    5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Лаборатория Базовых Знаний, 1999 (или любое последующее издание).
    6. Сборник задач по алгебре под редакцией А.И.Кострикина. И.В.Аржанцев, В.А.Артамонов и другие. М.: МЦНМО, 2009 (или любопе последующее издание)
    7. **Дополнительная литература**
33. Михалёв А.А., Михалёв А.В. Начала алгебры. Часть I. М.: Интернет-университет информационных технологий, 2005
34. Ким Г. Д. , Крицков Л. В., Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том I, М.: Планета знаний, 2007.
35. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре (любое издание, кроме 1-го, например М.: Добросвет, МЦНМО, 1998)
36. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия, М.: Наука, 1986
    1. **Программное обеспечение**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование** | **Условия доступа** |
| 1. | Microsoft Windows 7 Professional RUS  Microsoft Windows 10  Microsoft Windows 8.1 Professional RUS | *Из внутренней сети университета (договор)* |
| 2. | Microsoft Office Professional Plus 2010 | *Из внутренней сети университета (договор)* |

* 1. **Профессиональные базы данных, информационные справочные системы,   
     интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование** | **Условия доступа** |
|  | ***Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы*** | |
| 1. | Консультант Плюс | *Из внутренней сети университета (договор)* |
| 2. | Электронно-библиотечная система Юрайт | URL: https://biblio-online.ru/ |
|  | ***Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)*** | |
| 1. | Открытое образование | URL: https://openedu.ru/ |

* 1. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных, семинарских и самостоятельных занятий по дисциплине не требуют специального технического оснащения.