**Программа учебной дисциплины «Алгебра»**

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № от «\_\_»\_\_\_\_\_20\_\_ г.

|  |  |
| --- | --- |
| Автор | Р.С.Авдеев, кандидат физико-математических наук  ([suselr@yandex.ru](mailto:suselr@yandex.ru), [ravdeev@hse.ru](mailto:ravdeev@hse.ru)) |
| Число кредитов | 3 |
| Контактная работа (час.) | 40 |
| Самостоятельная работа (час.) | 74 |
| Курс | 1 |
| Формат изучения дисциплины | без использования онлайн курса |

1. **ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ**

Цель освоения дисциплины «Алгебра» — познакомить слушателей с основными структурами современной алгебры. Первые пять лекций посвящены теории групп, последние пять —кольцам и полям. Мы докажем базовые факты об этих структурах и продемонстрируем их возможные приложения. Сдавшие этот курс смогут, среди прочего, перечислить с точностью до изоморфизма все коммутативные группы из 100 элементов, найти сумму кубов корней данного многочлена, доказать, что многочлен от многих переменных однозначно раскладывается на простые множители и объяснить, почему не существует поля из 6 элементов.

В результате освоения дисциплины «Алгебра» студент должен:

* Знать основные факты о таких алгебраических структурах, как группы, кольца и поля; освоить алгоритмические аспекты современной алгебры.
* Уметь производить базовые вычисления с алгебраическими структурами, применять изученные факты и методы в прикладных задачах.
* Иметь навыки работы с конечными группами и конечными полями, овладеть основными техническими приёмами алгебры многочленов и теории абелевых групп.

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть знаниями и навыками в объёме программы средней школы по математике и освоить учебные курсы:

* Дискретная математика,
* Математический анализ-1,
* первые три модуля курса «Линейная алгебра и геометрия».

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении

следующих дисциплин:

* Математический анализ,
* Дифференциальные уравнения,
* Математические модели в экономике,
* Безопасность и криптография,
* Базы данных,
* Оптимизация,
* Теория вычислений,
* Алгоритмы и сложность,
* выполнение курсовых работ, предусмотренных РУП по направлению 01.03.02.

1. **СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Лекция 1.** Полугруппы и группы: основные определения и примеры. Группы подстановок и группы матриц. Порядок элемента и циклические подгруппы. Смежные классы и теорема Лагранжа. Индекс подгруппы.  
**Лекция 2.** Нормальные подгруппы, факторгруппы и теорема о гомоморфизме. Центргруппы. Прямое произведение групп. Факторизация по сомножителям. Разложение конечной циклической группы.  
**Лекция 3.** Конечно порожденные и свободные абелевы группы. Подгруппы свободных абелевых групп. Теорема о согласованных базисах. Алгоритм приведения целочисленной матрицы к диагональному виду.

**Лекция 4.** Конечные абелевы группы . Строение конечно порожденных абелевых групп. Решетки и дискретные подгруппы в евклидовом пространстве.  
**Лекция 5.** Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Транзитивные и свободные действия. Три действия группы на себе. Теорема Кэли. Классы сопряженности.  
**Лекция 6.** Кольца, алгебры и поля. Идеалы и факторкольца. Теорема о гомоморфизме. Алгебра матриц над полем является центральной простой алгеброй. Делители нуля, обратимые элементы, нильпотенты и идемпотенты.  
**Лекция 7.** Евклидовы кольца, кольца главных идеалов и факториальные кольца. Факториальность кольца многочленов от многих переменных.  
**Лекция 8.** Элементарные симметрические многочлены. Лексикографический порядок. Основная теорема о симметрических многочленах. Теорема Виета. Дискриминант многочлена. Понятие о базисе Грёбнера идеала.  
**Лекция 9.** Примеры полей. Характеристика поля. Расширения полей, алгебраические и  
трансцендентные элементы. Минимальный многочлен. Конечное расширение и его степень. Присоединение корня многочлена. Поле разложения многочлена: существование и единственность.  
**Лекция 10.** Конечные поля. Простое подполе и порядок конечного поля. Автоморфизм  
Фробениуса. Теорема существования и единственности для конечных полей. Поле из четырех элементов. Подполя конечного поля. Неприводимые многочлены над конечным полем.

1. **ОЦЕНИВАНИЕ**

Текущий контроль знаний осуществляется в следующих формах:

* письменная контрольная работа (на последней учебной неделе);
* выполнение письменных домашних заданий (задания выдаются еженедельно, каждое задание содержит 4 задачи);

Аудиторная и самостоятельная внеаудиторная работы оцениваться не будут.

Итоговый контроль проводится в форме устного экзамена.

Накопленная оценка за текущий контроль формируется из оценок за домашние задания и  
контрольную работу следующим образом:

Онакопл = 0,6\*Од/з + 0,4\*Ок/р

Итоговая оценка за дисциплину рассчитывается следующим образом:

Оитог = 0,5\* Онакопл + 0,5\* Оэкз  
Все оценки выставляются по 10-балльной системе, способ округления всегда арифметический. При подсчёте итоговой оценки накопленная берётся без округления.

1. **ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

Оценочные средства для текущего контроля и промежуточной аттестации

Для текущего контроля знаний, а также промежуточной аттестации можно использовать задачи из Сборника задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина.

Типовые задачи для подготовки к контрольной работе (номера даны по Сборнику задач по алгебре под редакцией А.И.Кострикина):

* Порядки элементов и подгруппы в конечных абелевых группах [60.39, 60.40, 60.42, 60.43, 60.45]
* Факторгруппы свободных абелевых групп [60.52, 60.53, 60.54]
* Орбиты и стабилизаторы для действий групп на множествах [57.1, 57.2, 57.3, 57.9]
* Разложение многочленов на неприводимые множители над полями R и C [27.1, 27.2]
* Симметрические многочлены и теорема Виета [31.2, 31.3. 31.4, 31.9, 31.10, 31.25, 31.26]
* Минимальные многочлены и вычисления в конечных расширениях полей [67.3, 67.13]

Список вопросов для подготовки к экзамену:

1. Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы. Коммутативные группы. Порядок группы. Примеры групп.

2. Подгруппы. Описание всех подгрупп в группе (Z; +). Циклические подгруппы. Циклические группы. Порядок элемента. Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы.

3. Смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа.

4. Четыре следствия из теоремы Лагранжа.

5. Нормальные подгруппы и факторгруппы.

6. Гомоморфизмы групп. Простейшие свойства гомоморфизмов. Изоморфизмы групп. Классификация циклических групп.

7. Ядро и образ гомоморфизма групп. Теорема о гомоморфизме.

8. Прямое произведение групп. Теорема о факторизации по сомножителям.

9. Разложение конечной циклической группы.

10. Конечно порождјнные абелевы группы. Свободная абелева группа и еј ранг.

11. Классификация свободных абелевых групп. Описание всех базисов свободной абелевой группы.

12. Свободность подгруппы свободной абелевой группы.

13. Целочисленные элементарные преобразования и алгоритм приведения целочисленной матрицы к диагональному виду.

14. Теорема о согласованных базисах. Инвариантные множители.

15. Примарные абелевы группы. Теорема о строении конечно порождјнных абелевых групп, доказательство существования.

16. Теорема о строении конечно порождјнных абелевых групп, доказательство единственности. Разложение конечной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических.

17. Экспонента конечной абелевой группы и критерий цикличности.

18. Действие группы на множестве. Орбиты и стабилизаторы. Число элементов в орбите для действия конечной группы.

19. Три действия группы на себе. Классы сопряжјнности. Теорема Кэли.

20. Кольца. Коммутативные кольца. Обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты. Примеры колец.

Поля. Критерий того, что кольцо вычетов является полем. Алгебры над полями.

21. Идеалы колец. Идеалы в коммутативных кольцах: главные и порождјнные подмножеством. Факторкольцо кольца по идеалу.

22. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма колец. Теорема о гомоморфизме для колец.

23. Делимость и ассоциированные элементы в коммутативных кольцах без делителей нуля. Евклидовы кольца. Критерий равенства нормы произведения двух элементов норме одного из сомножителей в евклидовом кольце.

24. Кольца главных идеалов. Теорема о том, что всякое евклидово кольцо является кольцом главных идеалов.

25. Наибольший общий делитель двух элементов евклидова кольца, теорема о его существовании и линейном выражении.

26. Простые элементы. Факториальные кольца. Факториальность евклидовых колец.

27. Симметрические многочлены. Степенные суммы и элементарные симметрические многочлены. Формулировка основной теоремы о симметрических многочленах. Примеры.

28. Лексикографический порядок и старший член многочлена. Лемма о старшем члене.

29. Старший член симметрического многочлена. Лемма об одночлене от элементарных симметрических многочленов, имеющем заданный старший член.

30. Доказательство основной теоремы о симметрических многочленах.

31. Теорема Виета. Дискриминант многочлена.

32. Примеры полей. Характеристика поля и простое подполе.

33. Расширение полей. Конечное расширение и его степень. Степень композиции двух расширений.

34. Алгебраические и трансцендентные элементы. Минимальный многочлен алгебраического элемента и его свойства.

35. Подполе в расширении полей, порождјнное алгебраическим элементом.

36. Существование конечного расширения исходного поля, в котором заданный многочлен имеет корень. Поле разложения многочлена.

37. Порядок конечного поля. Автоморфизм Фробениуса.

38. Теорема существования и единственности для конечных полей.

1. **РЕСУРСЫ**
   1. **Основная литература**
   2. Винберг Э. Б. Курс алгебры. М.: Факториал, 1999 (или любое последующее издание).
   3. Сборник задач по алгебре под редакцией А.И.Кострикина. И.В.Аржанцев, В.А.Артамонов и другие. М.: МЦНМО, 2009 (или любопе последующее издание)
   4. **Дополнительная литература**
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. М.: Физматлит, 1994 (или любое последующее издание).
3. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть III. Основные алгебраические структуры. М.: Физматлит, 2000 (или любое последующее издание).
   1. **Программное обеспечение**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование** | **Условия доступа** |
| 1. | Microsoft Windows 7 Professional RUS  Microsoft Windows 10  Microsoft Windows 8.1 Professional RUS | *Из внутренней сети университета (договор)* |
| 2. | Microsoft Office Professional Plus 2010 | *Из внутренней сети университета (договор)* |

* 1. **Профессиональные базы данных, информационные справочные системы,   
     интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование** | **Условия доступа** |
|  | ***Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы*** | |
| 1. | Консультант Плюс | *Из внутренней сети университета (договор)* |
| 2. | Электронно-библиотечная система Юрайт | URL: https://biblio-online.ru/ |
|  | ***Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)*** | |
| 1. | Открытое образование | URL: https://openedu.ru/ |

* 1. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных, семинарских и самостоятельных занятий по дисциплине не требуют специального технического оснащения.