**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение**

**высшего образования**

**"Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"**

Факультет компьютерных наук

Департамент больших данных и информационного поиска

**Программа дисциплины**

Сложность вычисление и логика в теоретической информатике

для направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра

**Авторы программы:**

**Н.К. Верещагин** [nikolay.vereshchagin@gmail.com](mailto:nikolay.vereshchagin@gmail.com)

# Одобрена на заседании департамента больших данных и информационного поиска

« » 2017 г. Руководитель департамента В.В.Подольский

Утверждена Академическим советом образовательной программы

«\_ »\_ 2017 г., № протокола

Академический руководитель образовательной программы А.С. Конушин

Москва, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*

1. **Область применения и нормативные ссылки**

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов направления 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра, изучающих дисциплину «Сложность вычислений и логика в теоретической информатике».

Программа разработана в соответствии с:

* образовательным стандартом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» образовательной программы подготовки бакалавров по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»;
* образовательной программой;
* рабочим учебным планом университета по направлению 01.03.02 «Прикладная математика и информатика» подготовки бакалавра, утвержденным в 2017 г.

1. **Цели освоения дисциплины**

Основная цель освоения дисциплины «Сложность вычислений и логика в теоретической информатике»  обучить студентов основным понятиям и методам вычислений, необходимым как в дальнейшем обучении, так и в работе по специальности.

1. **Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины**

В результате освоения дисциплины студент должен:

Знать основные понятия сложности высказываний, необходимые для дальнейшего изучения последующих дисциплин, предусмотренных базовым и рабочим учебными планами, а также для применения в профессиональной деятельности;

Уметь пользоваться основными методами дискретной математики для решения задач как в области дискретной математики, так и за ее приделами;

Иметь навыки формализации и решения практических задач методами дискретной математики. В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Компетенция | Код по ФГОС / НИУ | Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата) | Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию  компетенции |
| Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной | УК-2 |  |  |
| Способен выявлять научную сущность проблем в профессиональной области. | УК-3 |  |  |
| Способен описывать проблемы и ситуации профессиональной деятельности, используя язык и аппарат математики | ПК-1 |  |  |
| Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат | ПК-3 |  |  |
| Способен разработать математическую модель и провести её анализ для поставленной теоретической или прикладной задачи | ПК-8 |  |  |

1. **Место дисциплины в структуре образовательной программы**

Настоящая дисциплина относится к дисциплинам профессионального цикла, вариативной части профиля.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть знаниями и навыками в объеме программы средней школы по математике.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

Математический анализ 3;

Основы и методология программирования; Алгоритмы и структуры данных; Машинное обучение;

Алгоритмы для больших данных; Теория вычислений;

Математическая логика и её приложения; Алгоритмы и сложность;

Логические методы в информатике; Комбинаторные методы в информатике; Модели вычислений;

Дополнительные главы дискретной математики; Теория информации;

Вероятностные алгоритмы и протоколы; Исследование операций;

Теория игр;

Коллективные решения и кооперативные игры; Вероятностные модели;

Теоретическая информатика;

Комбинаторика, графы и многозначные логики; Теория информации, кодирования и поиска; Теория графов и приложения;

Комбинаторная оптимизация;

1. **Тематический план учебной дисциплины**

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| № | Название раздела | Всего часов | Аудиторные часы | | | Самостоя- тельная работа |
| Лекци и | Семин ары | Практиче ские  занятия |
| 1 | Логика высказываний |  | 10 | 10 |  | 25 |
| 2 | Логика предикатов первого порядка |  | 10 | 10 |  | 25 |
| 3 | Исчисление предикатов |  | 10 | 10 |  | 25 |
| 4 | Разрешимость логических теорий |  | 10 | 10 |  | 35 |
|  | Итого: | 190 | 40 | 40 |  | 110 |

1. **Формы контроля знаний студентов**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | | Форма контроля | | | | | 3 год | | | | Параметры \*\* | |  |
| 1 | 2 | 3 | 4 |  | | |
| Текущий (неделя) | | Коллоквиум | | | | |  |  |  | 1 | Устная беседа по пройденному материалу, проводится в 4-го модуля. Оценки - *Окол .* | | |
| Домашнее задание | | | | |  |  | 2 | 2 | Оценка за каждое домашнее задание ставится по результатам устной «защиты» домашнего задания.  Оценки - *Одз1*, *Одз2* , *Одз3* , *Одз4* | | |
|  |  | |  |  |  |  | | | | | |
| Итоговый | | Экзамен | | | | |  |  |  | 1 | Письменный экзамен на экзаменационной сессии третьего модуля, 3 часа, Оценка - *Оэкз* | | |

1. **Критерии оценки знаний, навыков**

Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать понимание основных определений, знание теорем и методов, умение применять изученные методы для решения задач. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

За домашнее задние, коллоквиум или экзамен допускается оценка 0 в тех случаях, когда студент решил ни одной задачи в работе или ничего не рассказал на коллоквиуме. Оценка 0 также ставится в случаях доказанного списывания на экзамене.

По домашним заданиям проводится защита (устная беседа), цель которой состоит в проверке самостоятельности выполнения домашних заданий. В случае если студент не может ответить на ключевые вопросы по решению задачи или сформулировать используемые при решении задач теоремы и определения, преподаватель обнуляет либо оценку за одну задачу, либо оценку за всё задание, в зависимости от степени неудовлетворительности ответа студента на вопросы.

Комиссия проходит в форме устного экзамена, накопленная оценка не учитывается.

1. **Содержание дисциплины**
2. **Логика высказываний**

Булевы функции и формулы, выполнимые и тождественно истинные формулы (тавтологии)

Тавтологии, как логические законы: правила де Моргана и контрапозиции.

Конъюнктивная и дизъюнктивная нормальная формы

Гильбертовское исчисление высказываний: теорема о полноте. Генценовское исчисление высказываний: теорема о полноте.

Алгоритм проверки выполнимости для 2-КНФ.

1. **Логика предикатов первого порядка**

Язык логики предикатов: сигнатуры, термы, формулы.

Семантика логики предикатов: модели данной сигнатуры (алгебраические системы, интерпретации).

Выполнимые и тождественно истинные формулы. Тождественно истинные формулы, как логические законы.

Предварённая нормальная форма.

Формальные теории. Модели теорий, семантическое следование (истинность во всех моделях теории), нормальные модели.

Совместные и семантически полные теории.

Базы данных, как структуры и запросы к базам данных, как формулы первого порядка.

Теории первого порядка и онтологические базы данных.

1. **Исчисление предикатов**

Аксиомы, правила вывода исчисления предикатов. Примеры выводов в исчислении предикатов.

Производные правила вывода, лемма о дедукции.

Теории первого порядка: аксиомы и теоремы теории, непротиворечивые теории, полные теории.

Теорема корректности исчисления предикатов: любая теорема теории истинна во всех её моделях.

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства).

1. **Разрешимость логических теорий**

Проблема разрешения для данной формальной теории.

Задача о распознавании выполнимости и общезначимости. Её разрешимость и проблема перебора P=?NP.

Сведения: произвольная КНФ к 3-КНФ, произвольная формула к КНФ. Неразрешимость чистого исчисления предикатов (без доказательства).

Теорема Тарского о неразрешимости элементарной теории натурального ряда (без доказательства).

Разрешимость элементарной теории плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.

Разрешимость элементарной теории поля комплексных чисел

Разрешимость элементарной теории упорядоченного поля действительных чисел (теорема Зайденберга--Тарского).

Теорема Фишера--Рабина об экспоненциальной временной сложности разрешения последних двух теорий (без доказательства).

1. **Образовательные технологии**

Чтение лекций и проведение семинаров. На семинаре разбираются прошлые домашние задачи, решаются задачи, выдается новое домашнее задание.

1. **Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента**

**10.1 Оценочные средства для оценки качества освоения дисциплины в ходе текущего контроля**

Примерные вопросы / задания для домашней работы:

1. Выводится ли в исчислении высказываний формула $((p\to q)\to p)\to p$ (закон Пирса)? Как?
2. Выводится ли в исчислении высказываний из формул $p\lor q$, $\lnot p\lor\lnot q$ формула $p\to \lnot p$? Как?
3. Выводится ли в исчислении высказываний из формулы $p\lor( q\land r)$, формула $(p\lorq)\land(p\lor r)$?Как?
4. Рассмотрим два одноместных предиката $P(x)$ ($x$ является птицей) и $Q(x)$ ($x$ летает). Напишите формулы первого порядка, выражающие следующие суждения:

Все птицы летают.

Некоторые птицы летают.

Некоторые птицы не летают

Некоторые не-птицылетают.

Ни одна птица не летает.

1. Общезначимы ли следующие формулы? Если нет, то приведите контрпример (то есть, модель, в которой формула ложна). Если да, то доказывать этого не нужно, просто напишите, что формула общезначима.

$\forall x\exists y P(x,y)\to \exists y \forall x P(x,y)$,

$\exists x P(x) \land \exists xQ(x) \to \exists x (P(x) \land Q(x))$;

$\forall x (P(x) \lor Q(x)) \to \forall x P(x) \lor \forall x Q(x)$;

$\forall x (P(x) \lor Q(x)) \to \forall x P(x) \lor \exists x Q(x)$;

$\exists x \forall y \exists z P(x,y,z) \to \forall x \exists y P(x,y,y)$.

\sp $\forall x \exists y \forall z P(x,y, z) \to \exists y \forall x P(x,y,y)$.

1. Доказать выводимость в исчислении предикатов (с использованием леммы о дедукции и других <<полезных лемм>>, правила тавтологического следствия, но без использования теоремы Гёделя о полноте) формулы $\exists y \forall xP(x,y)\to \forall x \exists y P(x,y)$.
2. Доказать выводимость в исчислении предикатов (с использованием леммы о дедукции и других <<полезных лемм>>, правила тавтологического следствия, но без использования теоремы Гёделя о полноте) формулы $\forall x(P(x)\to Q(x))\to(\exists x P(x)\to\exists x Q(x))$.
3. Является ли теория с аксиомами $\ex x \ P(x)$, $\ex x \ Q(x)$,$\ex x \lnot P(x)$, $\ex x\lnot \ Q(x)$ полной (сигнатура состоит из двух одноместных предикатных символов $P,Q$)?
4. Привести пример общезначимой (то есть, истинной в любой модели) замкнутой формулы $\exists x\ A$ такой, что формула $\forall x\ A$ не общезначима.
5. Напишите систему аксиом для аксиоматизации элементарной теории целых чисел с функцией добавления единицы порядка
6. Напишите систему аксиом для аксиоматизации элементарной теории целых чисел с отношением
7. Напишите систему аксиом для аксиоматизации элементарной теории действительных чисел с

функцией сложения.

**Тематика коллоквиума (4й модуль):**

Гильбертовское исчисление высказываний: теорема о полноте.

Генценовское исчисление высказываний: теорема о полноте.

Алгоритм проверки выполнимости для 2-КНФ.

Язык логики предикатов: сигнатуры, термы, формулы.

Семантика логики предикатов: модели данной сигнатуры (алгебраические системы, интерпретации).

Выполнимые и тождественно истинные формулы.

Тождественно истинные формулы, как логические законы.

Предварённая нормальная форма.

Формальные теории. Модели теорий, семантическое следование (истинность во всех моделях теории), нормальные модели.

Совместные и семантически полные теории.

Аксиомы, правила вывода исчисления предикатов. Примеры выводов в исчислении предикатов.

Производные правила вывода, лемма о дедукции.

Теории первого порядка: аксиомы и теоремы теории, непротиворечивые теории, полные теории.

Теорема корректности исчисления предикатов: любая теорема теории истинна во всех её моделях.

Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов.

Разрешимость элементарной теории плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.

Разрешимость элементарной теории поля комплексных чисел

Разрешимость элементарной теории упорядоченного поля действительных чисел (теорема Зайденберга--Тарского).

# **10.2 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины. Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу**

# Гильбертовское исчисление высказываний: теорема о полноте.

1. Генценовское исчисление высказываний: теорема о полноте.
2. Алгоритм проверки выполнимости для 2-КНФ.
3. Язык логики предикатов: сигнатуры, термы, формулы.
4. Семантика логики предикатов: модели данной сигнатуры (алгебраические системы, интерпретации).
5. Выполнимые и тождественно истинные формулы. Тождественно истинные формулы, как логические законы.
6. Предварённая нормальная форма.
7. Формальные теории. Модели теорий, семантическое следование

(истинность во всех моделях теории), нормальные модели.

1. Совместные и семантически полные теории.
2. Аксиомы, правила вывода исчисления предикатов. Примеры выводов в исчислении предикатов.
3. Производные правила вывода, лемма о дедукции.
4. Теории первого порядка: аксиомы и теоремы теории, непротиворечивые теории, полные теории.
5. Теорема корректности исчисления предикатов: любая теорема теории истинна во всех её моделях.
6. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов.
7. Разрешимость элементарной теории плотного линейного порядка без первого и последнего элементов.
8. Разрешимость элементарной теории поля комплексных чисел
9. Разрешимость элементарной теории упорядоченного поля действительных чисел (теорема Зайденберга--Тарского).
10. **Порядок формирования оценок по дисциплине**

**Итоговый контроль.**

*Оитог =* 0,6*·Онакопленная* + 0,4 *Оэкз*,

Где *Онакопленная* =(2/3)*Окол*+(1/12)(*Одз1* + *Одз2* + Oдз3 + *Одз4.* )

Или, более просто, вес коллоквиумов в итоговой оценке – 40%, экзамена – 40%, всех домашних заданий –

20%.

В вычислениях текущие оценки и промежуточные величины не округляются. Результат вычисляется точно и округляется только в момент выставления промежуточной и итоговой оценок. При выставлении итоговой и промежуточных оценок используется следующее правило округления: между 1 и 5 округление вниз, между 5 и 6 округление арифметическое, а в остальных случаях округление вверх. Т.е. 3,92 округляется до 3, 5,48 – до 5, 5,54 – до 6, 7,12 – до 8.

# Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

|  |  |
| --- | --- |
| Оценка по 10-балльной шкале | Оценка по 5-балльной шкале |
| 1, 2, 3 | неудовлетворительно |
| 4, 5 | удовлетворительно |
| 6, 7 | хорошо |
| 8, 9, 10 | отлично |

1. **Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**
   1. Базовый учебник

Н. К. Верещагин, А. Шень. Языки и исчисления. 4-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2012, 240 с.<http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf>

* 1. **Основная литература**

Н. К. Верещагин, А. Шень. Вычислимые функции. 4-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2012, 160 с.<http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part3-2.pdf>

Н. Верещагин, А. Шень. Математическая логика и теория алгоритмов. Начала теории множеств. Москва: изд-во МЦНМО, 1999.

Дж. Шёнфилд. Математическая логика. М. Наука, 1975.

* 1. **Дополнительная литература**