**Программа учебной дисциплины «Математический анализ 2»**

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № от «\_\_»\_\_\_\_\_20\_\_ г.

|  |  |
| --- | --- |
| Автор  | А.А. Наумов |
| Число кредитов  |  |
| Контактная работа (час.)  | 64 лекции и 64 семинары |
| Самостоятельная работа (час.)  |  |
| Курс  | Математический анализ, 2 |
| Формат изучения дисциплины | лекции, семинары, домашние задания |

1. **ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ**

Целями освоения дисциплины «Математический анализ-2» являются:

* + ознакомление студентов с теоретическими основами таких разделов математического анализа как теория рядов, кратное интегрирование, криволинейные и поверхностные интегралы, элементы векторного анализа, ряды и преобразование Фурье и др.;
	+ формирование практических навыков работы с кратными, криволинейными и поверхностными интегралами, а также с числовыми и функциональными рядами (включая ряды Тейлора и Фурье) и интегральными преобразованиями.

В результате освоения дисциплины студент должен:

**знать:**

* основные понятия теории числовых и функциональных рядов, интегральных преобразований; кратного, криволинейного и поверхностного интегрирования.
* Различные типы сходимости числовых и функциональных рядов;
* интегральные преобразования;
* элементы векторного анализа;

**уметь:**

* исследовать на сходимость числовые и функциональные ряды;
* суммировать некоторые типы числовых и функциональных рядов;
* Находить разложения функций в ряды Фурье и вычислять интегральные преобразований;
* вычислять кратные, криволинейные и поверхностные интегралы;
* Вычислять дифференциальные операторы первого порядка от скалярного и векторного поля.

**владеть:**

* методами теории числовых и функциональных рядов;
* методами Фурье-анализа;
* методами кратного интегрирования;
* методами теории поля.

Изучение дисциплины «Математический анализ 2» базируется на следующих дисциплинах:

- математика в объеме первого курса

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

* + дисциплины Математический анализ 1;
	+ дисциплины Линейная алгебра и геометрия;
	+ дисциплины Алгебра;
	+ дисциплины Дискретная математика.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* + Дифференциальные уравнения
	+ Теория вероятностей и математическая статистика;
	+ Математические модели в экономике;
	+ Оптимизация;
	+ Машинное обучение;
	+ Вычислительные методы;
	+ Обработка сигналов.
1. **СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Тема 1. Числовые ряды и бесконечные произведения**

Определение ряда, частичных сумм, сходимости. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши сходимости ряда. Абсолютная и условная сходимость рядов.

Ряды с неотрицательными членами. Эквивалентность сходимости и ограниченности последовательности частичных сумм. Признаки сравнения. Радикальный признак Коши. Признак Д'Аламбера. Интегральный признак Коши-Маклорена (разбирается на семинарских занятиях).

Знакопеременные ряды. Признаки Лейбница сходимости числовых рядов. Признаки Абеля и Дирихле сходимости числовых рядов (разбираются на семинарских занятиях).

Перестановки рядов: теорема Коши о перестановке абсолютно сходящегося ряда; теорема Римана о перестановке условно сходящегося ряда.

Бесконечные произведения. Формула Стирлинга (разбираются на семинарских занятиях)

**Тема 2. Функциональные последовательности и ряды**

Понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Супремум критерий, критерий Коши, признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов: переход к пределу, непрерывность суммы, почленное интегрирование, почленное дифференцирование.

Теорема Вейерштрасса о равномерной аппроксимации полиномами.

**Тема 3. Степенные ряды**

Степенные ряды. Понятие радиуса сходимости, формула Коши-Адамара. Теоремы Абеля. Метод Абеля суммирования. Непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость степенных рядов.

Теорема единственности для степенных рядов. Степенные ряды для элементарных функций. Условия представимости функции своим рядом Тейлора.

**Тема 4. Элементы комплексного анализа.**

Комплексные числа и функции. Тригонометрические функции. Формула Эйлера.

**Тема 5. Ряды Фурье**

Пространства со скалярным произведением. Ортогональные системы. Коэффициенты Фурье и их свойства: экстремальное свойство, тождество Бесселя, тождество Парсеваля. Замкнутые ортогональные системы.

Тригонометрическая система. Ряды Фурье по тригонометрической системе. Явный вид частичных сумм. Признаки Дини, Липшица сходимости ряда Фурье. Принцип локализации. Достаточное условие равномерной сходимости рядов Фурье. Эффект Гиббса.

Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теорема Вейерштрасса о замкнутости тригонометрической системы.

Интегральное преобразование Фурье.

**Тема 6. Кратный интеграл Римана**

Понятие кратного интеграла Римана. Связь интегрируемости и ограниченности. Критерий Дарбу интегрируемости. Свойства кратного интеграла. Сведение кратного интеграла к повторному (теорема Фубини).

Замена переменных в кратном интеграле. Полярные, цилиндрические и сферические координаты.

**Тема 7. Интеграл Лебега**

Мера Лебега. Измеримые множества. Измеримые функции. Интегрирование неотрицательных измеримых функций. Интегрирование измеримых функций. Теорема Фубини. Сравнение с интегралом Римана.

**Тема 8. Криволинейные и поверхностные интегралы**

Понятия кривой, длины кривой. Криволинейные интегралы I и II рода, их свойства.

Понятия поверхности, площади поверхности. Сапог Шварца. Поверхностные интегралы I рода, их свойства.

Ориентация поверхности. Поверхностные интегралы II рода по гладким и кусочно-гладким поверхностям, их свойства.

**Раздел 9. Элементы векторного анализа**

Понятие скалярного и векторного полей. Дифференциальные операторы 1-го порядка (градиент, ротор, дивергенция).

Формула Грина. Понятие потенциального векторного поля. Необходимые и достаточные условия потенциальности.

Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса. Определения ротора и дивергенции, не ис- пользующие координат.

Формулы Грина, Гаусса-Остроградского и Стокса как частные случаи общей формулы Стокса.

1. **ОЦЕНИВАНИЕ**

Оценка всех форм контроля знаний осуществляется по 10-ти бальной шкале. По результатам текущего контроля осеннего семестра вычисляется накопленная оценка

Oоценка 1 семестр = 0.7 \* Oнакопленная 1 семестр + 0.3 \* Oэкзамен № 1,

где

Oнакопленная 1 семестр = 0.35 \* OКЛ №1-2 + 0.40\* OКР №1-2 + 0.25 \* OДЗ №1 Оценка за экзаменационную письменную работу (Oэкзамен №1) – не блокирующая. По результатам текущего контроля весеннего семестра вычисляется накопленная итоговая оценка

Oоценка 2 семестр = 0 . 7 \* Oнакопленная итоговая + 0 . 3 \* Oэкзамен №2, где

Oнакопленная итоговая формируется следующим образом

Oнакопленная итоговая = 0 . 20 \* O оценка 1 семестр + 0 . 30 \* OКР №3-4 + 0 . 30 \* OКЛ №2 + 0 . 20 \* OДЗ №2

Оценка за экзаменационную письменную работу (Oэкзамен №2) – не блокирующая. Правило округления оценок – арифметическое.

1. **ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**Примеры задач для контрольных работ, домашних заданий и письменного экзамена**

1. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{(-1)^{n}}{n^{{1}/{n}}}$
2. Исследуйте на сходимость ряд $∑\_{n=1}^{\infty }\frac{C^{n}n!}{n^{n}},C>0$
3. Исследуйте на сходимость ряд $∑\_{n=1}^{\infty }(\sqrt[3]{(n+1)}-\sqrt[3]{n})sin^{-a}(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}),a>0$
4. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{sin(n+1/n)}{\sqrt[5]{n}}$
5. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{arctannsinn}{\sqrt[2]{n}}$
6. Исследуйте на равномерную сходимость на $R$ функциональный ряд $\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{nx}{1+n^{7}x^{2}}$
7. Исследуйте на равномерную сходимость на $R$ функциональный ряд $\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{nx}{1+n^{7}x^{9}}$
8. Вычислите сумму ряда $\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{n^{2}}{2^{n}}$
9. Разложите в ряд по степеням $x$ функцию $arctanx$. Найдите множество $x$, на котором сумма ряда равна $arctanx$.
10. Функцию $x$ разложите в ряд Фурье на промежутке $(-π,π)$. Постройте график суммы полученного разложений, а также первой частичной суммы полученного разложения (на $R$). Выпишите равенство Парсеваля для полученного разложения.
11. Вычислите сумму ряда $\sum\_{n=1}^{\infty }\frac{sin(nx)}{n}$
12. Представьте интегралом Фурье характеристическую функцию отрезка [0; 1].
13. Представьте интегралом Фурье функцию $e^{-x^{2}}$
14. Вычислите $div(rot(F)),F=(arcsin(\frac{x^{2}}{x^{2}+y^{2}+1}),z^{x^{3}+y^{3}},x+y+z+1)$

## **Образцы заданий коллоквиума**

1. Дайте определение условной сходимости числового ряда. Сформулируйте и докажите признак Дини сходимости ряда Фурье.
2. Дайте определения радиуса сходимости степенного ряда. Сформулируйте и докажите при- знак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.
3. Дайте определение равномерной сходимости функциональной последовательности. Сформулируйте и докажите теорему об экстремальном свойстве коэффициентов Фурье.
4. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о замкнутости тригонометрической системы. Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.
5. Сформулируйте интегральный признак Коши-Маклорена сходимости числовых рядов. Сформулируйте и докажите теорему о почленном интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда.
6. Сформулируйте теорему о сведении кратного интеграла к повторному. Сформулируйте и докажите формулу Грина.
7. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле. Сформулируйте и докажите формулу Гаусса-Остроградского.
8. Дайте определение интеграла Лебега. Сформулируйте и докажите формулу Гаусса-Остроградского.
9. Дайте определение поверхностного интеграла первого рода. Докажите эквивалентность двух определений дивергенции (использующего координаты и не использующего координаты).
10. Приведенные образцы иллюстрируют структуру заданий коллоквиума, однако не включают всех возможных вопросов. В реальные задания коллоквиума могут входить любые вопросы по определениям, формулировкам и доказательствам, не выходящие за пределы настоящей Про- граммы (см. раздел 8 «Содержание дисциплины»).
11. **РЕСУРСЫ**
	1. **Основная литература**
	2. Ильин В. А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. "Математический анализ. В 2 частях. Часть 2. Издательство МГУ, 2007
	3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. ‒ М.: «Издательство Астрель», 2002.
	4. Зорич В.А. Математический анализ. Часть I - II. − М.: МЦНМО, 2016
	5. **Дополнительная литература**
12. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ. − М.: Физматлит, 2016
13. Ширяев А.Н. Вероятность 1. - М.: МЦНМО, 2012
14. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. Основание информатики. Пер. с англ. —М.: Мир, 1998
	1. **Программное обеспечение**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование** | **Условия доступа** |
|   1. | Microsoft Windows 7 Professional RUSMicrosoft Windows 10Microsoft Windows 8.1 Professional RUS | *Из внутренней сети университета (договор)* |
| 2. | Microsoft Office Professional Plus 2010 | *Из внутренней сети университета (договор)* |

* 1. **Профессиональные базы данных, информационные справочные системы,**
	**интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **№ п/п** | **Наименование** | **Условия доступа** |
|  | ***Профессиональные базы данных, информационно-справочные системы*** |
| 1. | Не требуются для освоения дисциплины |  |
| 2. | Не требуются для освоения дисциплины |  |
|  | ***Интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)*** |
| 1. | Не требуются для освоения дисциплины |  |

* 1. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных занятий по дисциплине обеспечивают использование и демонстрацию тематических иллюстраций, соответствующих программе дисциплины в составе:

ПЭВМ с доступом в Интернет (операционная система, офисные программы, антивирусные программы);

мультимедийный проектор с дистанционным управлением.

Учебные аудитории для лабораторных и самостоятельных занятий по дисциплине оснащены ПЭВМ, с возможностью подключения к сети Интернет и доступом к электронной информационно-образовательной среде НИУ ВШЭ.