**Программа учебной дисциплины дискретная математика (пилотный поток)**

Утверждена

Академическим советом ООП

Протокол № от «\_\_»\_\_\_\_\_20\_\_ г.

|  |  |
| --- | --- |
| Автор | Подольский Владимир Владимирович |
| Число кредитов | 6 |
| Контактная работа (час.) | 104 |
| Самостоятельная работа (час.) | 124 |
| Курс | 1 |
| Формат изучения дисциплины | без использования онлайн курса |

1. **ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ**

Основная цель освоения дисциплины «Дискретная математика» -- обучить студентов основным понятиям и методам дискретной математики, необходимым как в дальнейшем обучении, так и в работе по специальности.

В результате освоения дисциплины студент должен:

* Знать основные понятия и методы дискретной математики, необходимые для дальнейшего изучения последующих дисциплин, предусмотренных базовым и рабочим учебными планами, а также для применения в профессиональной деятельности;
* Уметь пользоваться основными методами дискретной математики для решения задач как в области дискретной математики, так и за ее приделами;
* Иметь навыки формализации и решения практических задач методами дискретной математики.

Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть знаниями и навыками в объеме программы средней школы по математике.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

* Математический анализ 2;
* Математический анализ 3;
* Основы и методология программирования;
* Алгоритмы и структуры данных;
* Машинное обучение;
* Вычислительные методы;
* Алгоритмы для больших данных;
* Теория вычислений;
* Математическая логика и её приложения;
* Алгоритмы и сложность;
* Логические методы в информатике;
* Комбинаторные методы в информатике;
* Модели вычислений;
* Доп. главы дискретной математики;
* Теория информации;
* Вероятностные алгоритмы и протоколы;
* Исследование операций;
* Теория игр;
* Кооперативные игры;
* Вероятностные модели;
* Теоретическая информатика;
* Комбинаторика, графы и многозначные логики;
* Теория информации, кодирования и поиска;
* Теория графов и приложения;
* Комбинаторная оптимизация.

# Содержание УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

*Тема 1.*Математическая индукция

*Тема 2.*Комбинаторика

*Тема 3.*Множества и логика

*Тема 4.*Отношения и их графы

*Тема 5.*Мощность множеств

*Тема 6.*Упорядоченные множества

*Тема 7.*Графы: начальные сведения

*Тема 8.*Вероятность: первые шаги

*Тема 9.*Основы теории чисел

*Тема 10.*Сложность алгоритмов: разрешающие деревья

*Тема 11.*Схемы из функциональных элементов

*Тема 12.*Вычислимость и перечислимость

*Тема 13.*Машины Тьюринга

*Тема 14.*Конкретные неразрешимые задачи

# ОЦЕНИВАНИЕ

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Тип контроля | Форма контроля | 1 год | | | | Параметры \*\* |
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| Текущий  (неделя) | Коллоквиум |  | 1 | 1 |  | Устная беседа по пройденному материалу, проводится в середине 2-го модуля и конце 3-го модуля. Оценки - *Окол1* и *Окол2 .* |
| Домашнее задание | 1 | 1 | 1 |  | Разбиты на порции задач для еженедельной письменной сдачи. Оценка за каждую из порций ставится по результатам устной «защиты» домашнего задания. Оценка за домашнее задание – среднее арифметическое оценок порций, выданных в текущем модуле (Соответственно *Одз1*, *Одз2* , *Одз3* ). |
| Промежу­точный | Экзамен |  | 1 |  |  | Письменный экзамен на зачетной неделе второго модуля, 3 часа, Оценка - *Опр.экз* |
| Итоговый | Экзамен |  |  | 1 |  | Письменный экзамен на зачетной неделе третьего модуля, 3 часа, Оценка - *Оэкз* |

* 1. **Критерии оценки знаний, навыков**

Для прохождения контроля студент должен продемонстрировать понимание основных определений, знание теорем и методов, умение применять изученные методы для решения задач. Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

* 1. **Порядок формирования оценок по дисциплине**

**Промежуточный контроль.**

*Опромежут =* 0,6*·Онакопленная1* + 0,4 *Опр.экз*,

где *Онакопленная1* =0,5 *Окол1*+ 0,25 *Одз1* + 0,25 *Одз2.*

**Итоговый контроль.**

*Оитог =* 0,7*·Опнакопленная2* + 0,3 *Оэкз*,

где *Онакопленная2* =(3/14)*Окол1+*(3/14)*Окол2*+ (3/14) *Опр.экз* + (5/42)(*Одз1* + *Одз2*+ *Одз3.* )

Или, более просто, вес коллоквиумов в итоговой оценке – 30%, промежуточного экзамена – 15%, всех домашних заданий – 25%.

В вычислениях текущие оценки и промежуточные величины не округляются. Результат вычисляется точно и округляется только в момент выставления накопленной, промежуточной и итоговой оценок. Округление при выставлении итоговой и промежуточных оценок арифметическое, а при выставлении накопленной оценки используется следующее правило округления: между 1 и 5 округление вниз, между 5 и 6 округление арифметическое, а в остальных случаях округление вверх. Т.е. 3,92 округляется до 3, 5,48 – до 5, 5,54 – до 6, 7,12 – до 8.

Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

|  |  |
| --- | --- |
| Оценка по 10-балльной шкале | Оценка по 5-балльной шкале |
| 1, 2, 3 | неудовлетворительно |
| 4, 5 | удовлетворительно |
| 6, 7 | Хорошо |
| 8, 9, 10 | Отлично |

# ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

* 1. **Тематика заданий текущего контроля**

Примерные вопросы/ задания для домашнего задания:

1. В зачете участвовало несколько студентов и преподавателей. Известно, что в комнату, где происходил зачет, каждый участник зачета вошел лишь однажды и что каждый преподаватель поговорил с каждым студентом. Докажите, что в какой-то момент зачета в комнате присутствовали либо все студенты (и, может быть, кто-то из преподавателей), либо все преподаватели (и, может быть, кто-то из студентов).
2. Какие строки в треугольнике Паскаля состоят только из нечетных чисел?
3. В группе студентов есть один, который знает С++, java, python, huskell. Каждые три из этих языков знают два студента. Каждые два - 6 студентов. Каждый из этих языков знают по 15 студентов. Сколько студентов в группе?
4. В магазине продаются вазы как разного цвета, так и разной формы. Докажите, что в этом магазине можно найти две вазы, различающиеся и цветом, и формой.
5. Чего больше: инъективных отображений 5-элементного множества в 20-элементное или сюръективных отображений 20-элементного множества в 5-элементное?
6. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: нале-ВО! По неопытности часть солдат поворачивается неправильно. После этого каждую секунду происходит следующее: солдаты, оказавшиеся лицом друг к другу, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты прекратятся.
7. Докажите, что любое множество непересекающихся триодов на плоскости конечно или счетно. (Триод - это объединение трех отрезков, имеющих общий конец.)
8. В дереве на 8 вершинах три вершины имеют степень 1. Сколько вершин имеют степень 3?
9. Какова вероятность, что при бросании 4 костей сумма очков окажется меньше 10?
10. Напишите формулу для вероятности объединения событий A и B при условии события C, если известны вероятности каждого из событий A, B при условии C и вероятность их пересечения AB при условии C.
11. Существует ли степень тройки, заканчивающаяся на 0001?
12. Существует ли трехзначное целое полжительное число, которое дает остаток 1 при делении на 2, остаток 2 при делении на 3, остаток 3 при делении на 4, остаток 4 при делении на 5, остаток 5 при делении на 6 и остаток 6 при делении на 7?
13. Докажите выполнимость КНФ, которая состоит из 200 дизъюнктов, каждый из которых содержит 8 различных литералов.
14. Опишите схему сравнения чисел линейного размера и логарифмической глубины.
15. Докажите, что в линейном коде либо все слова имеют четный вес, либо ровно полвина слов имеет нечетный вес.
16. Машина Тьюринга с засорившейся головкой может писать на ленту только символ \*. Докажите, что задача остановки МТ с засорившейся головкой нерзрешима.
17. Докажите, что существует полугруппа, проблема распознавания равенства в которой алгоритмически неразрешима.
    1. **Вопросы для оценки качества освоения дисциплины**

Примерный перечень вопросов к экзамену по всему курсу.

1. Формулировка принципа математической индукции. Примеры использования математической индукции в доказательствах.

2. Операции с множествами, их свойства.

3. Логические связки, таблицы истинности. Дизъюнктивная нормальная форма, полиномы Жегалкина.

4. Рекуррентные формулы. Примеры использования в перечислительной комбинаторике.

5. Подсчет числа перестановок, подмножеств n-битовых слов.

6. Бином Ньютона, треугольник Паскаля.

7. Формула включений и исключений.

8. Бинарные отношения и двудольные графы.

9. Отношения эквивалентности, классы.

10. Функции, инъекции, сюръекции, биекции. Образы и прообразы.

11. Перестановки, разложение в циклы, транспозиции, порядок перестановки.

12. Частичный порядок, примеры. Изоморфизм упорядоченных множеств. Линейный порядок.

13. Методы доказательства неизоморфности упорядоченных множеств.

14. Фундированные множества и индукция. Цепи и антицепи.

15. Мощность множества, конечная и бесконечная мощность.

16. Счетные множества.

17. Несчетные множества. Континуальные множества. Несчетность континуальных множеств.

18. Ориентированные и неориентированные графы, их основные характеристики.

19. Деревья. Число вершин и рёбер в дереве.

20. Эйлеров цикл, критерий его существования для ориентированных и неориентированных графов.

21. Конечное вероятностное пространство, события, формула сложения вероятностей. 22. Комбинаторные формулы и вероятность.

23. Вероятностные доказательства существования (оценка сверху вероятности нарушения одного из требований с помощью union bound).

24. Математическое ожидание и его линейность.

25. Условные вероятности, теорема Байеса, независимые события.

26. Делимость, делимость с остатком. НОД и НОК.

27. Алгоритм Евклида.

28. Обратный ход алгоритма Евклида и диофантовы уравнения.

29. Основная теорема арифметики.

30. Функция Эйлера. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера.

31. Китайская теорема об остатках.

32. Разрешающие деревья.

33. Двоичный поиск.

34. On-line и off-line алгоритмы.

35. Верхние и нижние оценки сложности сортировки.

36. Конъюнктивная нормальная форма, задача о выполнимости. Редукция произвольной формулы к 3-КНФ.

37. Исчисление резолюций, теорема о полноте.

38. Алгоритм проверки выполнимости для 2-КНФ.

39. Во всякой 3-КНФ можно выполнить 7/8 условий (вероятностное доказательство).

40. Схемы из функциональных элементов. Размер и глубина схемы.

41. Схемы для сложения и умножения чисел.

42. Большинство функций имеют экспоненциальную схемную сложность.

43. Булев куб и расстояние Хемминга. Исправление ошибок и кодовое расстояние. Отгадывание числа с неверными ответами.

44. Верхняя оценка для числа кодовых слов.

45. Код Хемминга.

46. Алгоритмы со входом и выходом. Вычислимые функции.

47. Перечислимые и разрешимые множества. Теорема Поста.

48. Рефлексия: возможность пошагового выполнения и универсальный интерпретатор.

49. Универсальная функция, перечислимое неразрешимое множество, неразрешимость проблемы остановки.

50. Машины Тьюринга. Тезис Черча-Тьюринга. Многоленточные машины Тьюринга.

51. Универсальная машина Тьюринга.

52. Системы Туэ. Проблема выводимости в данной системе Туэ. Полугруппы. Проблема распознавания равенства в полугруппе.

1. **РЕСУРСЫ**
   1. **Основная литература**

L. Lovasz, Kati Vesztergombi: Discrete Mathematics. Lecture Notes, Yale University, 1999. <http://www.cs.elte.hu/~lovasz/dmbook.ps>

* 1. **Дополнительная литература**

А. Шень. Математическая индукция (c1) 3-е изд., М.: МЦНМО, 2007, 32 с. <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-induction.pdf>

А. Шень. Вероятность: примеры и задачи (c1) 2-е изд., М.: МЦНМО, 2008, 64 с., ISBN 978-5-94057-284-8 <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-probability.pdf>

А. Шень. Игры и стратегии с точки зрения математики (c1) 2-е изд., М.: МЦНМО, 2008, 40 с., ISBN 978-5-94057-432-3 <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-games.pdf>

Н. К. Верещагин, А. Шень. Начала теории множеств. 4-е изд., доп., М: МЦНМО, 2012, 112 с. <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part1-2.pdf>

Н. К. Верещагин, А. Шень. Языки и исчисления. 4-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2012, 240 с. <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part2-2.pdf>

Н. К. Верещагин, А. Шень. Вычислимые функции. 4-е изд., испр., М.: МЦНМО, 2012, 160 с. <http://www.mccme.ru/free-books/shen/shen-logic-part3-2.pdf>

Ромащенко А. Е., Румянцев А. Ю., Шень А., Заметки по теории кодирования, МЦНМО, 2011, 80 стр. <http://www.mccme.ru/~anromash/courses/coding-theory.ps>

H. Buhrman and R. de Wolf. Complexity Measures and Decision Tree Complexity: A Survey. In Theoretical Computer Science, 288(1):21-43, 2002. <http://homepages.cwi.nl/~rdewolf/publ/qc/dectree.pdf>

Ingo Wegener, The Complexity of Boolean Functions. Wiley Teubner on Applicable Theory in Computer Science, 470 pages, 1987. <http://eccc.hpi-web.de/resources/pdf/cobf.pdf>

Рейнгард Дистель, Теория графов, Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2002, 336 с. ISBN 5-86134-101-Х.

Jukna, Stasys. Extremal Combinatorics. Texts in Theoretical Computer Science. An EATCS Series. 2nd ed. 2011, XXIV, 308 p.

* 1. **Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории для лекционных, семинарских и самостоятельных занятий по дисциплине не требуют специального технического оснащения.